# КОНТАКТНА МЕХАНІКА

# ШОРСТКІСТЬ, РОЗШАРУВАННЯ І ЗНОШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

Колективна монографія

*За загальною редакцією*
*Р. М. Мартиняка*

Видавець Вікторія Кундельська
Львів 2022

УДК 539.3
М 29

**Рецензенти:**

д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В. Лобода
д-р фіз.-мат. наук, доц. Й.З. Піскозуб
д-р техн. наук, ст. дослідник М.М. Ткачук

**Мартиняк Р.М.**

М 29 Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь : колективна монографія / М.М. Кундрат, Н.А. Гук, Н.Л. Козакова, В.І. Острик, М.С. Слободян, В.І. Кузьменко, О.В. Приходько, Н.М. Д’яченко, Є.В. Шашкова, В.П. Силованюк, Н.Д. Вайсфельд, Г.О. Фесенко, О.П. Козачок, Р.М. Мартиняк, О.В. Максимук, Ю.В. Сачук, А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, В.А. Сяський, О.Ю. Дейнека, Т.С. Нагірний, К.А. Червінка, А.О. Камінський, М.В. Дудик, В.М. Феньків; за заг. ред. Р.М. Мартиняка // Львів : Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – 392 с . – URL: https://www.researchgate.net/publication/366177313

ISBN 978-617-8116-13-2 (PDF)

Монографія присвячена математичному моделюванню та розробленню аналітичних і числових методів дослідження контактної взаємодії тіл різної геометричної форми і фізичної структури з урахуванням шорсткості їхніх меж, проковзування і розшарування спряжених поверхонь, механічного контакту берегів внутрішніх і міжфазних тріщин та фрикційного зношування рухомих поверхонь.

Для наукових та інженерних працівників, які спеціалізуються в галузі механіки деформівного твердого тіла, контактної механіки і трибології.

Іл. 224. Табл. 23. Бібліогр. 395 назв.

УДК 539.3

ISBN 978-617-8116-13-2 (PDF)

**ЗМІСТ**

# ПЕРЕДМОВА

В колективній монографії «Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь» відображено сучасні результати українських вчених в галузі моделювання та розроблення аналітичних і числових методів дослідження контактної взаємодії тіл різної геометричної форми і фізичної структури з урахуванням шорсткості їхніх меж, порушення контакту, проковзування і розшарування спряжених поверхонь, механічного контакту берегів внутрішніх і міжфазних тріщин та фрикційного зношування рухомих поверхонь.

Авторами монографії є співробітники інститутів НАН України в Києві, Львові і Сумах, національних університетів і коледжів Дніпра, Запоріжжя, Луцька, Львова, Одеси, Рівного й Умані, незалежні дослідники, а також українські вчені, які працюють в університетах Великої Британії і Польщі.

В монографії досліджено граничну рівновагу тіла з нерозтягливим гнучким підсиленням вільного краю. З’ясовано вплив навантаження на розвиток локалізованих зон передруйнування. Визначено критичну довжину підсилення, за якої відбувається зміна характеру руйнування. Модельна схема застосована до аналізу процесу відшарування підсилення. Знайдено аналітичні залежності робочої довжини підсилення від амплітуди навантаження та кількості циклів за циклічного навантаження.

Змодельовано контактну поведінку двошарової системи за наявності односторонніх зв’язків та тертя на лінії розмежування матеріалів. Задачу сформульовано з урахуванням геометричної та конструктивної нелінійності у вигляді крайової задачі з додатковими умовами у вигляді нерівностей, що описують явища зчеплення, фрикційного проковзування та відриву шарів. Сформульовано і розв’язано обернену задачу для ідентифікації додаткового силового навантаження, що запобігає відшаруванню в системі.

Розглянуто фрикційне проковзування та часткове зчеплення берегів прямолійної тріщини в однорідній площині. За моделлю Комніноу вивчено фрикційний контакт берегів міжфазної прямолінійної тріщини у кусково-однорідній площині та смузі, кругової тріщини на межі поділу матеріалів у кусково-однорідному просторі та криволінійної тріщини на межі матриці та кругового включення.

Сформульовано задачу про згин з розтягом безмежної пластини з круговим отвором та системою наскрізних прямолінійних тріщин, береги яких гладко контактують по смузі сталої ширини. Використовуючи метод комплексних потенціалів, її зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь для похідних від стрибків переміщень та кутів повороту на берегах тріщин. Досліджено поведінку контактного зусилля між берегами тріщин та коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль за різних параметрів задач.

Розглянуто клас контактних задач для пружно-пластичної смуги з мікрорельєфом на поверхні та отримано числовий розв'язок задачі

поверхневого пластичного деформування обкочуванням роликом. Запропоновано формулювання та метод розв’язання обернених задач формування мікрорельєфу заданого профілю.

Змодельовано механічний контакт шорстких поверхонь з урахуванням нормальних і зсувних деформацій мікронерівностей. Сформульовано статичні контактні задачі для пружних шорстких тіл у вигляді систем рівностей та нерівностей для невідомих розподілів контактних напружень на поверхні можливого дотику. Описано алгоритм чисельного розв’язування систем нелінійних інтегральних рівнянь. Розв’язано задачі про вдавлювання циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір, про контакт пружних куль та про стискування пружних циліндрів за відсутності тертя; з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування отримано розв’язок задачі про контакт пружної кулі з пружним півпростором та задач про вдавлювання циліндричного і прямокутного штампів у шорсткий півпростір.

Розглянуто просторову квазістатичну контактну задачу про ковзання з тертям квадратного в плані штампа по межі шорсткого півпростору і статичну задачу про вдавлювання з тертям такого штампа в шорсткий півпростір за наявності зон зчеплення і проковзування. Задачі розв’язано, поєднуючи метод ітерацій та метод механічних квадратур. Досліджено вплив початкових параметрів (коефіцієнтів шорсткості і висоти прикладання горизонтальної сили) на контактні характеристики і форму початково невідомої ділянки контакту, областей зчеплення і проковзування.

Побудовано модель деформування трансверсально-ізотропних тіл, що містять заліковані ін'єктуванням тріщини. В основу моделі покладені умови взаємодії матеріалу заповнювача із основним матеріалом, що враховують нелінійність деформування тонких прошарків ін'єкційного матеріалу. В результаті проблема зведена до розв'язування системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь відносно переміщень поверхонь тріщини. Отримано аналітичні розв'язки рівнянь для залікованих тріщин нормального відриву.

Розвинуто метод розв’язання контактної задачі про втискування кругового штампа позацентровою силою у півнескінченний пружний шар на гладкій жорсткій основі. Знайдені момент сили, що забезпечує поступальний рух штампа, та заглиблення штампа.

Сформульовано контактні задачі про зношування тіл з виступами за повного налягання поверхонь, використовуючи модель фрикційного втомного руйнування. Враховано, що стирання відбувається не на всій поверхні контакту, а лише на привершинних ділянках виступів, де питома сила тертя перевищує певне порогове значення. Розвинуто метод розв’язування задач цього класу, що полягає у зведенні їх до сингулярних інтегральних рівнянь на товщину зношеного матеріалу. Побудовано аналітичні розв’язки зносоконтакних задач для тіл з поодинокими виступами різної форми, для тіл з періодично розташованими виступами та тіл з хвилястими поверхнями.

Досліджено контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної, параболічної) з пружною півплощиною з урахуванням зношування матеріалу. На основі моделі абразивного зношування побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактного тиску. Розроблена методика розв'язування інтегрального рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення. Розглянуто контакт жорстких штампів канонічної форми з пружною півплощиною, захищеною покриттям, за його зношування. Відповідне інтегро-диференціальне рівняння розв'язано, використовуючи поліноми Чебишова. Визначено розподіл контактного тиску, область контакту та величину зношування в різні моменти часу.

Досліджено напружений стан на межі поділу матеріалів нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра великої кривини при їх гладкому з'єднанні методом пресової посадки або за наявності одного чи двох міжфазних розрізів, береги яких у процесі деформації не контактують, при з'єднанні зварюванням (склеюванням). Математичні моделі таких задач побудовано у вигляді систем сингулярних інтегральних рівнянь, числова реалізація яких проведена методами механічних квадратур і колокації. При визначенні початкових параметрів статично невизначеного підсилювального ребра використано метод сил.

Локально градієнтний підхід у термомеханіці використано до побудови математичних моделей, що враховують геометричну неоднорідність реальної поверхні тіла. Порівняно із існуючими моделями, введено додатковий параметр, що описує шорсткість поверхні, та досліджено його вплив на приповерхневу неоднорідність густини і напружень та міцність тонкої плівки.

В рамках моделі Комніноу досліджено напружено-деформований стан в околі вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу біматеріального тіла. Виявлено існування інтервалів кутів зламу межі розділу і коефіцієнтів тертя берегів тріщини, для яких контакт берегів не забезпечує усунення осциляційної особливості напружень і переміщень, притаманних моделі повністю розкритої міжфазної тріщини. За допомогою методу Вінера–Гопфа отримано розв'язок задачі про параметри маломасштабної області контакту берегів тріщини, що взаємодіють за законом сухого тертя.

Львів, грудень 2022 р. Ростислав Мартиняк

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Вайсфельд Н.Д.** − доктор фізико-математичних наук, професор, Королівський коледж, Лондон, Об'єднане Королівство – King’s College, London, United Kingdom

**Гук Н.А.** – доктор фізико-математичних наук, професор, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

**Дейнека О.Ю.** – кандидат технічних наук, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

**Дудик М.В.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна

**Д’яченко Н.М.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

**Камінський А.О.** – доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

**Козакова Н.Л.** – кандидат фізико-математичних наук, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

**Козачок О.П.** – кандидат фізико-математичних наук, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

**Кузьменко В.І.** – доктор фізико-математичних наук, професор, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

**Кундрат М.М.** – доктор технічних наук, професор, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

**Максимук О.В.** – доктор фізико-математичних наук, професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

**Мартиняк Р.М.** – доктор фізико-математичних наук, професор, Львів, Україна

**Нагірний Т.С.** – доктор фізико-математичних наук, професор, Зеленогурський університет, Зелена Гура, Польща – University of Zielona Góra, Zielona Góra, Poland

**Острик В.І.** – доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, Україна

**Приходько О.В.** – кандидат фізико-математичних наук, Відокремлений структурний підрозділ «Запорізький металургійний фаховий коледж Запорізького національного університету», Запоріжжя, Україна

**Сачук Ю.В.** – кандидат фізико-математичних наук, КЗВО «Луцький педагогічний коледж» Волинської обласної ради, Луцьк, Україна

**Силованюк В.П.** – доктор технічних наук, професор, Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів, Україна

**Слободян М.С.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

**Сяський А.О.** – доктор технічних наук, професор, Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

**Сяський В.А.** – кандидат технічних наук, доцент, Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

**Феньків В.М.** − Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна

**Фесенко Г.О.** − кандидат фізико-математичних наук, доцент, Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

**Червінка К.А.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

**Шашкова Є.В.** – магістр математики, Київ, Україна

**Шевцова Н.В.** – кандидат технічних наук, Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

## РОЗДІЛ 11

## ЛОКАЛЬНЕ ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНИХ ПІВПРОСТОРІВ ІЗ ВИСТУПАМИ

**О.П. Козачок, Р.М. Мартиняк**

Для поліпшення трибологічних характеристик вузлів машин і конструкцій застосовують різноманітні технології модифікування їх поверхонь, зокрема мікротекстурування [24], за якого на них формується регулярний мікрорельєф з періодично розташованими виступами чи виїмками однакового профілю. Для цього використовують лазерне текстурування, точне алмазне точіння, тиснення, гравіювання, вібропрокат, віброудар, струменеве абразивне оброблення, мікроелектроерозійне оброблення, шліфування та інші технології [22, 24, 33]. Регулярна поверхнева структура виникає також і під час дискретного зміцнення деталей (наприклад, технології електроіскрового легування), яке передбачає чергування вздовж поверхні зміцнених “острівців” або “стрічок” будь-якої конфігурації з незміцненими ділянками [11, 20]. У зв’язку з цим перед контактною механікою постає актуальна проблема розроблення методів дослідження фрикційної контактної взаємодії деформівних тіл з періодично змінними вздовж поверхні фізико-механічними, триботехнічними і геометричними характеристиками, зокрема з регулярним рельєфом.

В останні десятиліття інтенсивно розвиваються методи розв’язання зносо-контакних задач теорії пружності [1, 3–5, 10, 12, 16–19, 21, 23, 25, 26, 34]. Їхнє формулювання передбачає, що стирання відбувається по всій поверхні контакту. Водночас у реальних умовах експлуатації вузлів машин і механізмів зношування часто починається, коли фрикційні параметри досягнуть порогових значень. Для опису такого зношування в літературі запропоновано, зокрема, модель фрикційного втомного руйнування [2, 3] і термомеханічний критерій зношування [6].

У цьому розділі сформульовано контактні задачі про зношування тіл з виступами за повного налягання поверхонь тіл, використовуючи модель фрикційного втомного руйнування. Враховано, що стирання відбувається не на всій поверхні контакту, а лише на привершинних ділянках виступів, де питома сила тертя перевищує певне порогове значення. Розвинуто метод розв’язування задач цього класу, що полягає у зведенні їх до сингулярних інтегральних рівнянь на товщину зношеного матеріалу. Спочатку побудовано аналітичні розв’язки зносоконтакних задач для тіл з поодинокими виступами різної форми. Далі розв’язано зносоконтактні задачі для тіл з регулярним рельєфом, утвореним періодично розташованими виступами, та тіл з хвилястими поверхнями. Ці дослідження розпочато в працях [8, 13].

## 11.1. Метод дослідження локального зношування тіл з поодиноким виступом на основі моделі фрикційно-втомного руйнування

Розглянемо два пружні ізотропні півпростори з ідентичних матеріалів. Поверхня нижнього плоска, а верхній має вздовж нескінченної смуги завширшки $2c$ циліндричний виступ, форма якого задана парною функцією $r(x)$ $\left(r(\pm c)=0,\ r'(\pm c)=0\right)$ (рис. 11.1 *а*). Вважаємо, що максимальна висота виступу $A$ мала порівняно з його основою ($A \ll c$). На нескінченності до півпросторів прикладено рівномірно розподілене навантаження $P^{\infty}$, що зумовлює повне налягання поверхонь без просвітів між ними. В тілах реалізується стан плоскої деформації, що дає підстави [15] розглядати контакт двох півплощин $D_1$ та $D_2$ (рис. 11.1 *б*), які є перетинами відповідно нижнього та верхнього півпросторів площиною $Oxy$, перпендикулярною до твірної виїмки.

Одне з тіл нерухоме, а інше рухається з постійною швидкістю $V$ в напрямі твірної виступу. Вважаємо, що сили тертя $\tau$, які виникають на спряжених поверхнях внаслідок їхнього взаємного ковзання, підпорядковані закону Амонтона: $\tau = \tau_{y\tilde{z}} = fP$, де $f$ – коефіцієнт тертя, $P$ – контактний тиск. Досліджуватимемо зношування спряжених поверхонь, виходячи із моделі фрикційно-втомного руйнування, згідно з якою стирання розпочинається на тих ділянках, де питома сила тертя перевищує порогове значення $\tau_0$. Вважаємо навантаження таким, що в початковий момент часу $t=0$ умова $\tau > \tau_0$ виконується на деякій ділянці $L_0 = (-a; a)$ межі $L$ під виступом ($a < c$), де виникає найбільший контактний тиск.

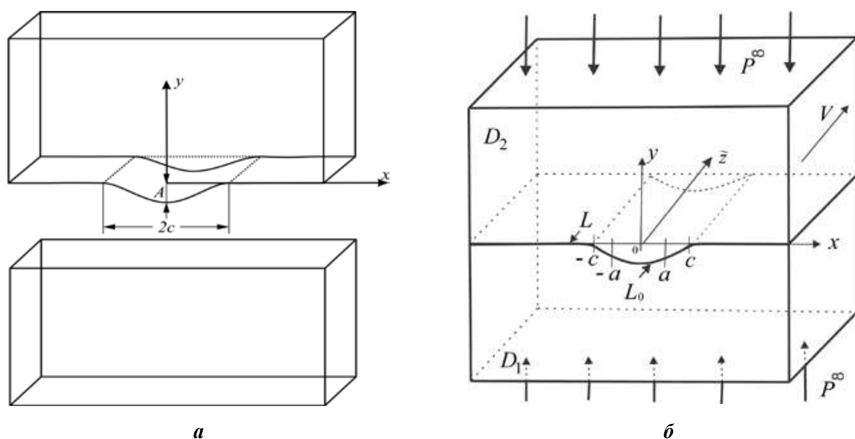



**Рис. 11.1**

Ділянка локального зношування $L_0$ розширюватиметься в часі внаслідок зменшення виступів: $L_0 = L_0(t) = \left(-a(t); a(t)\right)$

Не обмежучи загальності, вважатимемо, що стирається лише тіло з виступом. Швидкість зношування описуватимемо законом [3]

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = BV\left[ fP(x,t) - \tau_0 \right], \quad |x| \le a(t) \tag{11.1}$$

де $h(x,t)$ – товщина спрацьованого матеріалу; $B$ – стала.

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд

$$\sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-}, \quad \tau_{xy}^{-} = \tau_{xy}^{+} = 0, \quad x \in L; \tag{11.2}$$

$$v^{+} + r(x) = v^{-}, \quad x \in L \setminus L_0; \tag{11.3}$$

$$v^{+} + r(x) + h(x,t) = v^{-}, \quad x \in L_0; \tag{11.4}$$

$$\sigma_{yy} = -P^{\infty}, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \tag{11.5}$$

Тут $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$, $\tau_{xy}$ – компоненти тензора напружень; $v$ – переміщення вздовж осі $Oy$; знаки „+” і „–” вказують на граничні значення функції на осі $Ox$ у верхній і нижній півплощинах.

Використовуючи метод комплексних потенціалів та модифікований метод функцій міжконтактних просвітів [9, 13, 30–32], виразимо напруження і переміщення через початкову форму виступу $r(x)$ і товщину зношеного матеріалу $h(x,t)$:

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi_n(z) - \Phi_n(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_n{}'(z)} - P^{\infty}, \quad n = 1,2;$$

$$2G(u' + iv') = \kappa\Phi_n(z) + \Phi_n(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_n{}'(z)} + \frac{3-\kappa}{4}P^{\infty}, \quad z \in D_n,$$

$$\Phi_n(z) = \frac{(-1)^{3-n}}{\pi K} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{h_s'(s,t)}{s-z}ds + \int_{-c}^{c} \frac{r'(s)}{s-z}ds,, \qquad z \in D_n, \tag{11.6}$$

де $z = x + iy$ – комплексна змінна; $\kappa = 3 - 4\nu$; $G$ – модуль зсуву; $\nu$ – коефіцієнт Пуассона; $K = (\kappa + 1)/G$; $r'(s) = dr(s)/ds$; $h'(s,t) = \partial h(s,t)/\partial s$.

Використовуючи формули (11.6), для контактного тиску поверхонь $P(x,t) = -\sigma_{yy}^{\pm}(x,t)$ отримаємо:

$$P(x,t) = \frac{2}{\pi K}\left( \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{h_s'(s,t)}{s-z}ds + \int_{-c}^{c} \frac{r'(s)}{s-z}ds \right) + P^{\infty}. \tag{11.7}$$

Зауважимо, що функція товщини зношеного матеріалу $h(x,t)$ та ділянка зношення $a(t)$, які входять у співвідношення (11.6), (11.7), заздалегідь невідомі. Підставляючи контактний тиск (11.7) в закон зношування (11.1) для визначення функції $h(x,t)$ отримаємо сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (СІДР):

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}-\frac{2BfV}{\pi K}\int_{-a(t)}^{a(t)}\frac{h_s'(s,t)}{s-x}ds=\frac{2BfV}{\pi K}\int_{-c}^{c}\frac{r'(s)}{s-x}ds+BfV\left(P^{\infty}-\tau_0\right). \quad (11.8)$$

Функція $h(x,t)$ задовольняє упочаткову умову

$$h(x,0)=0, \quad x\in L, \quad (11.9)$$

оскільки при $t=0$ знос відсутній. Під час зношування виступ змінює свою форму неперервно, залишаючись гладким. Тому функція $h(x,t)$ в кожен момент часу на кінцях ділянки стирання $L(t)$ задовольняє умови

$$h(\pm a(t),t)=0, \quad t>0, \quad (11.10)$$

$$h'(a(t),t)=0, \quad t>0. \quad (11.11)$$

Після припрацювання (при $t\to\infty$) контактний тиск на всій ділянці $L(t)$ стає рівним $\tau_0/f$ і зношення зупиняється, тобто $\partial h(x,t)/\partial t\to 0$ при $t\to\infty$. Врахувавши цю асимптотичну поведінку і здійснивши в інтегро-диференціальному рівнянні (11.8) граничний перехід при $t\to\infty$, отримуємо рівняння для визначення товщини зношеного матеріалу $h(x,\infty)$:

$$\frac{2}{\pi K}\int_{-a(\infty)}^{a(\infty)}\frac{h_s'(s,t)}{s-x}ds=-\frac{2}{\pi K}\int_{-c}^{c}\frac{r'(s)}{s-x}ds-P^{\infty}+\frac{\tau_0}{f}. \quad (11.12)$$

Тоді умови (11.10), (11.11) мають вигляд

$$h(\pm a_{\infty},\infty)=0, \quad t>0, \quad (11.13)$$

$$h'(a_{\infty},\infty)=0, \quad t>0, \quad (11.14)$$

де $a_{\infty}=a(\infty)$ – кінцева півширина ділянки зношування.

Обмежений розв’язок рівняння (11.12), що задовольняє умову (11.14), визначатимемо за формулою [15]

$$h'(x)=-\frac{K\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2\pi}\int_{-a_{\infty}}^{a_{\infty}}\frac{F(\eta)d\eta}{\sqrt{a_{\infty}{}^2-\eta^2}\,(\eta-x)}, \quad (11.15)$$

де $F(x)=-\frac{2}{\pi K}\int_{-c}^{c}\frac{r'(s)}{s-x}ds-P^{\infty}+\frac{\tau_0}{f}$. Такий розв’язок існує за виконання

додаткової умови на праву частину рівняння (11.12)

$$\int_{-a_\infty}^{a_\infty} \frac{F(\eta)\,d\eta}{\sqrt{a_\infty{}^2-\eta^2}}=0\,, \qquad (11.16)$$

яка служить для визначення кінцевої півширини ділянки зношування $a_\infty$ .

## 11.2. Аналітичні розв'язки задач про зношування тіл із виступами різної форми

Розглядатимемо дві форми виступу, що описуються функціями $r(x)=-A\left(1-\dfrac{x^2}{c^2}\right)^{3/2}$ і $r(x)=-A\left(1-\dfrac{x^2}{c^2}\right)^{5/2}$, $|x|\le c$ .

*а) Форма виступу задана функцією* $r(x)=-A\left(1-\dfrac{x^2}{c^2}\right)^{3/2}$ .

Згідно з формулою (11.7) такий виступ на початку взаємодії тіл зумовлює контактний тиск

$$P(x,0)=\begin{cases} \dfrac{6A}{Kc}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{c^2}\right)+P^\infty, & x\in(-c;c) \\ \dfrac{6A}{Kc}\left(\left|\dfrac{x}{c}\right|\sqrt{\dfrac{x^2}{c^2}-1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{c^2}\right)+P^\infty, & x\notin(-c;c). \end{cases} \qquad (11.17)$$

Проаналізуємо залежність (11.17) з метою визначення діапазону зміни зовнішнього тиску $P^\infty$, за якого одночасно реалізуватиметься повний контакт тіл (без просвітів) і відбуватиметься локальне зношування. Мінімум контактного тиску досягається на кінцях виступу в точках $x=\pm c$ і рівний

$$\min_{x\in L} P(x,0)=P^\infty-\frac{3A}{cK}.$$

Очевидно, що контакт поверхонь тіл буде повним, якщо $\min\limits_{x\in L} P(x,0)>0$ , отже,

$$P^\infty>\frac{3A}{cK}. \qquad (11.18)$$

Локальне зношування виступу розпочнеться за виконання умови

$$P^\infty<\frac{\tau_0}{f}<\max_{x\in L} P(x,0)\,. \qquad (11.19)$$

Коли $\min\limits_{x\in L} P(x,0) > \dfrac{\tau_0}{f}$, то зношування відбуватиметься вздовж всієї поверхні контакту, а якщо ж $\min\limits_{x\in L} P(x,0) < \dfrac{\tau_0}{f} < P^\infty$, тоді скрізь, за винятком двох скінченних проміжків в околі країв виступу $x=\pm c$, де контактний тиск мінімальний. Якщо ж $\max\limits_{x\in L} P(x,0) < \dfrac{\tau_0}{f}$, то зношування взагалі відсутнє.

Півширину ділянки, на якій розпочинається стирання, $a_0 = a(0)$ визначаємо з умови $P(a_0,0) = \dfrac{\tau_0}{f}$. Враховуючи в ній подання для контактного тиску (11.7) і початкову умову (11.9), отримуємо рівняння для знаходження $a_0$:

$$\frac{2}{\pi K}\int_{-c}^{c}\frac{r'(s)}{s-a_0}ds = \frac{\tau_0}{f} - P^\infty . \qquad (11.20)$$

Під вершиною виступу в точці $x=0$ досягається максимальний тиск $\max\limits_{x\in L} P(x,0) = P^\infty + \dfrac{3A}{cK}$. Підставивши його в умову локального зношування (11.19), прийдемо до нерівності

$$\frac{\tau_0}{f} - \frac{3A}{cK} < P^\infty < \frac{\tau_0}{f} . \qquad (11.21)$$

Нерівності (11.18), (11.21) не суперечать одна одній, якщо $\dfrac{\tau_0}{f} > \dfrac{3A}{cK}$. Отже, в лівій частині нерівності (11.22) стоїть додатна величина. Тому зі співвідношень (11.19), (11.22) отримуємо такий діапазон зміни навантаження

$$\max\left\{\left[\frac{3A}{cK}\right],\left[\frac{\tau_0}{f} - \frac{3A}{cK}\right]\right\} < P^\infty < \frac{\tau_0}{f} , \qquad (11.22)$$

в якому дана пара локально зношується за повного контакту тіл. Ввівши параметр $\theta = \dfrac{cK}{3A}\left(\dfrac{\tau_0}{f} - P^\infty\right)$, умову (11.22) можемо записати в еквівалентному вигляді:

$$P^\infty = \frac{\tau_0}{f} - \frac{3\theta A}{cK}, \quad 0<\theta<1 . \qquad (11.23)$$

Підставивши дану функцію $r(x)$ в умову (11.20) і рівняння (11.15) та врахувавши залежність (11.23), визначимо півширину початкової ділянки

зношування $a_0$ та функцію $h'(x,\infty)$ :

$$a_0 = c\sqrt{\frac{1-\theta}{2}}\ ,$$

$$h'(x,\infty) = -\frac{3A}{c^3}x\sqrt{a_\infty^2 - x^2}\ . \qquad (11.24)$$

Проінтегрувавши функцію (11.24) по $x$ з урахуванням умови (11.13), визначимо товщину спрацьованого матеріалу

$$h(x,\infty) = A(1-\theta)^{3/2}\left(1-\frac{x^2}{a_\infty^2}\right)^{3/2}, \quad |x| \le a_\infty\ . \qquad (11.25)$$

З умови (11.16) знайдемо півширину ділянки, де відбулося припрацювання

$$a_\infty = c\sqrt{1-\theta}\ .$$

Врахувавши у формулі (11.7) подання (11.25), визначимо контактний тиск після припрацювання :

$$P(x,\infty) = P(x,0) - \begin{cases} \dfrac{6A(1-\theta)}{Kc}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{a_\infty^2}\right), & x\in(-a_\infty;a_\infty) \\ \dfrac{6A(1-\theta)}{Kc}\left(\left|\dfrac{x}{a_\infty}\right|\sqrt{\dfrac{x^2}{a_\infty^2}-1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{a_\infty^2}\right)+P^\infty, & x\notin(-a_\infty;a_\infty). \end{cases}$$

Всі обчислення у цьому розділі здійснено для наступних безрозмірних величин: координати $\tilde{x} = x/c$; максимальної висоти виступу $\tilde{A} = A/c$; зовнішнього навантаження на нескінченності $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$; порогового значення сили тертя $\tilde{\tau}_0 = \dfrac{K\tau_0}{f}$; півширини ділянки виступу $\tilde{a} = a/c$, що зношується; функції $\tilde{H} = \left|\dfrac{r(x)-h(x)}{c}\right|$, яка описує форму виступу після зношування; контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x},t) = KP(x,t)$. Розраховували для виступу, безрозмірна висота якого $\tilde{A} = 0{,}001$.

На рис. 11.2 побудовано залежності початкової $\tilde{a}_0$ (штрихові криві) та кінцевої $\tilde{a}_\infty$ (суцільні криві) ділянок зношування виступу від зовнішнього навантаження $\tilde{P}^\infty$ за різного порогового значення сили тертя $\tilde{\tau}_0$ (крива 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0{,}009$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0{,}01$, крива 3 – $\tilde{\tau}_0 = 0{,}011$). Зі збільшенням

зовнішнього навантаження ділянки зношування зростають, причому кінцева ділянка зношування завжди більша від початкової.

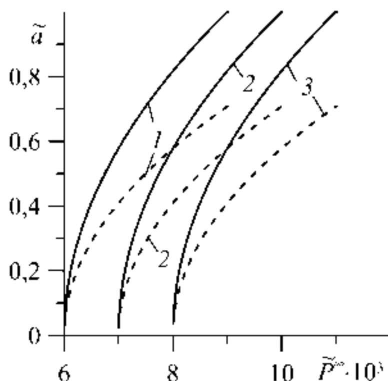



**Рис. 11.2**

Форму виступу в початковий момент (штрихова крива) та після зношування (суцільні криві) за $\tilde{\tau}_0 = 0,009$ при різних зовнішніх навантаженнях (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,007$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,008$, крива 3 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0085$) та при $\tilde{P}^{\infty} = 0,0085$ для різного порогового значення сили тертя (крива 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0,009$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,01$, крива 3 – $\tilde{\tau}_0 = 0,011$) зображено на рис. 11.3 та рис. 11.4 відповідно. Зі збільшенням навантаження

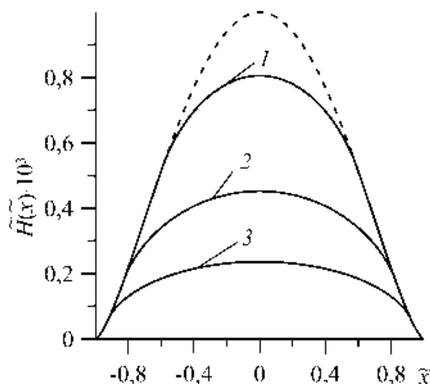



**Рис. 11.3**

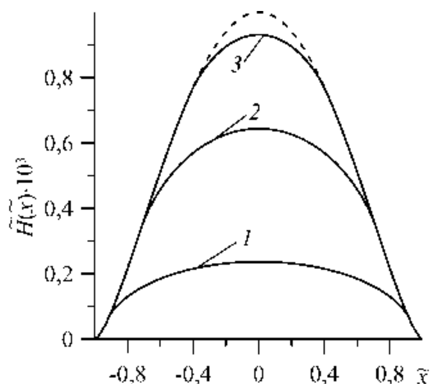



**Рис. 11.4**

$\tilde{P}^{\infty}$ товщина зношеного матеріалу збільшується; що більше порогове значення сили тертя $\tilde{\tau}_0$, то менша товщина зношеного матеріалу.

Рис. 11.5 ілюструє розподіл контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ на початку контакту (при $t = 0$, штрихові криві) та після припрацювання (при $t \to \infty$,

суцільні криві) за $\tilde{P}^{\infty} = 0,007$ та $\tilde{\tau}_0 = 0,009$. Горизонтальна ділянка суцільних кривих відповідає рівномірному тиску на ділянці припрацювання після зношування. Точки перетину штрихової кривої з горизонтальною ділянкою визначають контактну зону, звідки розпочнеться зношування.

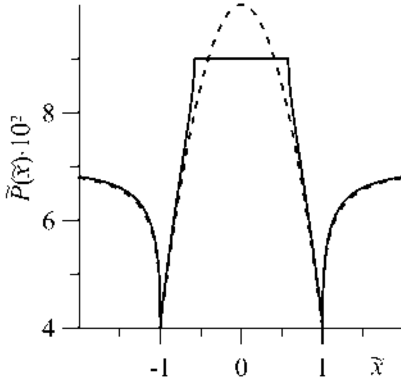



**Рис. 11.5**

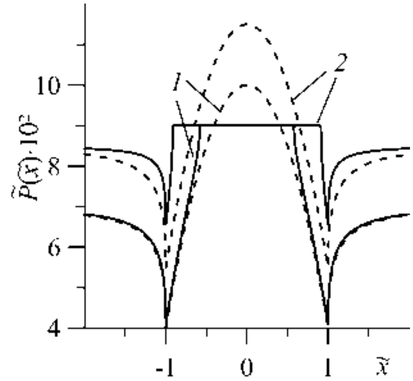



**Рис. 11.6**

Рис. 11.6 відтворює контактний тиск на початку стирання і після припрацювання при $\tilde{\tau}_0 = 0,009$ для різних значень навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,007$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0085$). Штрихові лінії зображають початковий тиск, а суцільні – кінцевий. Після припрацювання максимальний контактний тиск зменшується, а мінімальний зростає. Що більше зовнішнє навантаження, то більші ділянки початкового і кінцевого зношування та кількість зношеного матеріалу. Контактний тиск після припрацювання зі збільшенням зовнішнього навантаження стає рівномірнішим, тобто зменшується перепад між максимальним і мінімальним тиском. Мінімальний контактний тиск має гострий пік на кінцях виступу ( $\tilde{x} = \pm 1$ ).

*б) Форма виступу задана функцією* $r(x) = -A\left(1 - \dfrac{x^2}{c^2}\right)^{5/2}$.

Виступ на початку взаємодії тіл зумовлює контактний тиск

$$P(x,0) = \begin{cases} \dfrac{10A}{Kc^5}\left[x^4 - \dfrac{3}{2}c^2x^2 + \dfrac{3}{8}c^4\right] + P^{\infty}, & x \in (-c;c) \\ \dfrac{10A}{Kc^5}\left[|x|\left(x^2 - c^2\right)^{\frac{3}{2}} + x^4 - \dfrac{3}{2}c^2x^2 + \dfrac{3}{8}c^4\right] + P^{\infty}, & x \notin (-c;c). \end{cases} \qquad (11.26)$$

Рівняння відносно півширини початкової ділянки зношування $a_0$ матиме вигляд

$$\frac{10A}{Kc}\left(-\frac{a_0^4}{c^4}+\frac{3a_0^2}{2c^2}-\frac{3}{8}\right)=\frac{4A}{15cK}\left(\tau_0-P^{\infty}\right), \qquad (11.27)$$

Товщина спрацьованого матеріалу, кінцева ділянка зношування та тиск після припрацювання визначаються наступним чином:

$$h(x,\infty)=\frac{A\left(1-\sqrt{\frac{4A}{15cK}\left(\tau_0-P^{\infty}\right)}\right)^{5/2}}{2a_{\infty}^5}\left(a_{\infty}^2-x^2\right)^{3/2}\times$$
$$\times\left(3a_{\infty}^2-\frac{5a_{\infty}^2}{1-\sqrt{\frac{4A}{15cK}\left(\tau_0-P^{\infty}\right)}}+2x^2\right), \qquad |x|\le a_{\infty}, \qquad (11.28)$$

$$a_{\infty}=\sqrt{1+\sqrt{\frac{4A}{15cK}\left(\tau_0-P^{\infty}\right)}}, \qquad (11.29)$$

$$P(x,\infty)=P(x,0)-$$
$$-\begin{cases}\frac{10A(1-\theta)}{Kc}\left(\frac{x^4}{a_{\infty}^2}-\frac{3}{2}\frac{x^2}{a_{\infty}^2}+\frac{3}{8}\right), & x\in\left(-a_{\infty};a_{\infty}\right)\\ \frac{10A(1-\theta)}{Kc}\left(\left|\frac{x}{a_{\infty}}\right|\left(\frac{x^2}{a_{\infty}^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{x^4}{a_{\infty}^2}-\frac{3}{2}\frac{x^2}{a_{\infty}^2}+\frac{3}{8}\right)+P^{\infty}, & x\notin\left(-a_{\infty};a_{\infty}\right),\end{cases} \qquad (11.30)$$

де $\theta=\frac{4A}{15cK}\left(\tau_0-P^{\infty}\right)$.

На рис. 11.7 зображено форму виступу в початковий момент (штрихова крива) та після зношування (суцільні криві) за $\tilde{\tau}_0=0,009$ при різних зовнішніх навантаженнях (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty}=0,006$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty}=0,007$, крива 3 – $\tilde{P}^{\infty}=0,008$).

Розподіл контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ на початку контакту (при $t=0$) та після припрацювання (при $t\to\infty$) за $\tilde{P}^{\infty}=0,007$ та $\tilde{\tau}_0=0,009$ ілюструє рис. 11.8 (штрихова та суцільна криві відповідно). Горизонтальна ділянка суцільних кривих відповідає рівномірному тиску на ділянці припрацювання після зношування. Точки перетину штрихової кривої з горизонтальною ділянкою визначають контактну зону, звідки розпочнеться зношування.

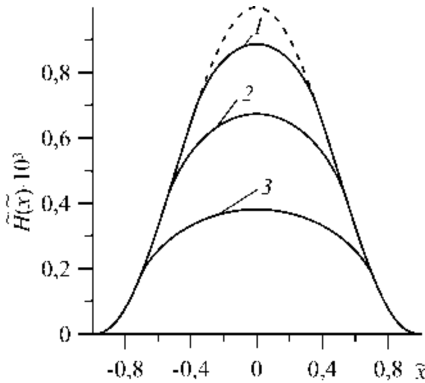



Рис. 11.7

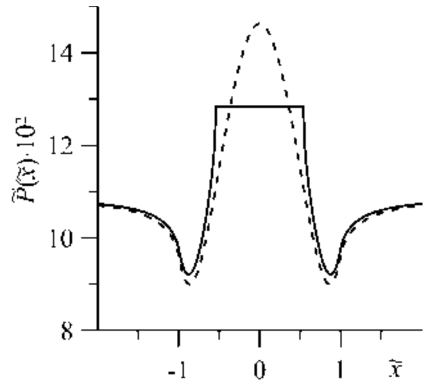



Рис. 11.8

## 11.3. Зносоконтактна задача для тіла із регулярною системою виступів

Розглянемо два пружні ізотропні півпростори з ідентичних матеріалів. Поверхня нижнього тіла плоска, а поверхня верхнього має регулярну текстуру, яка утворена періодичною системою циліндричних виступів симетричної форми $r(x)$ (рис. 11.9), завширшки $2b$ кожний, розташованих з періодом $d$ вздовж всієї межі.

Верхнє тіло рухається з постійною швидкістю $V$ в напрямі твірної виступів (рис. 11.10). Зумовлене тертям зношування будемо досліджувати на основі моделі фрикційного втомного руйнування, описаній в підрозділі 11.1. Вважаємо навантаження таким, що в початковий момент часу $t=0$ умова $\tau > \tau_0$ виконується під кожним виступом лише на деякій ділянці $L_m = (-a+md, a+md)$, $m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, інтерфейсу $L$ $(a<b)$, де виникає найбільший контактний тиск. Періодично розташовані ділянки локального зношування $L_m$ розширюватимуться з часом внаслідок зміни геометрії поверхонь тіл. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що стирається лише тіло з виступами. Швидкість зношування описуватимемо законом (11.1).

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд (11.2)-(11.5), де $L_0 = L_0(t) = \cup L_m$.

В цьому випадку задачу зведено до СІДР з ядром Гільберта відносно функції зношування $h(x,t)$:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} - \frac{2AfV}{dK} \int\limits_{L_0(t)} h'_s(s,t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{d} ds = AfVR(x), \quad x \in L_0(t), \quad (11.31)$$

де $R(x)=\dfrac{2}{dK}\int\limits_{-b}^{b} r'(s)\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi(s-x)}{d}\,ds+P^{\infty}-\dfrac{\tau_0}{f}$.

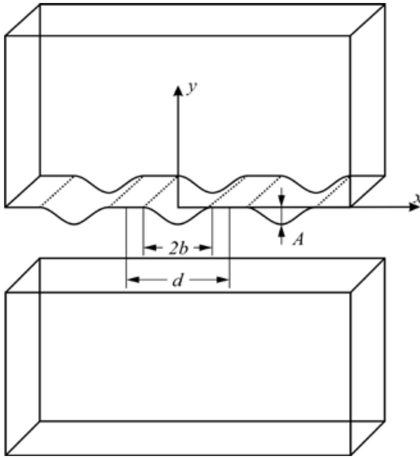



**Рис. 11.9**

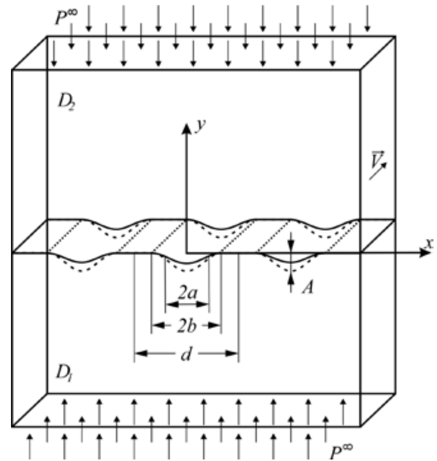



**Рис. 11.10**

Функція $h(x,t)$ задовольняє умови:

$$h(x,0)=0\,,\quad x\in L\,, \tag{11.32}$$

$$h(\pm a(t),t)=0\,,\;\; h'(a(t),t)=0\quad t>0\,, \tag{11.33}$$

Після припрацювання $(t\to\infty)$ контактний тиск на всій ділянці $L_0(\infty)$ стає рівним $\tau_0/f$ і зношення зупиняється, тобто $\partial h(x,t)/\partial t\to 0$ при $t\to\infty$. Враховуючи цю асимптотичну поведінку і здійснивши в рівнянні (11.31) граничний перехід при $t\to\infty$, отримаємо СІР для визначення товщини зношеного матеріалу $h(x,\infty)$:

$$\frac{2}{dK}\int\limits_{L_0(\infty)} h'_s(s,\infty)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi(s-x)}{d}\,ds=-R(x)\,. \tag{11.34}$$

Умови (11.33) при $t\to\infty$ мають вигляд

$$h(\pm a_{\infty},\infty)=0\,,\quad h'_x(\pm a_{\infty},\infty)=0\,,\quad a_{\infty}=a(\infty)\,. \tag{11.35}$$

Виконавши заміну змінних

$$\xi=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{d}\right),\; \eta=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi s}{d}\right),\; \gamma=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi b}{d}\right),\; \alpha=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi a}{d}\right), \tag{11.36}$$

СІР (11.34) з ядром Гільберта трансформуємо у СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta,t)}{\eta-\xi} d\eta = \frac{d}{2\left(1+\xi^2\right)} K\left(\frac{\tau_0}{f} - P^\infty\right) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{r'(\eta)}{\eta-\xi} d\eta, \ |\xi| \le \alpha. \qquad (11.37)$$

Умови (11.34) після заміни змінних (11.36) матимуть вигляд

$$h'(\pm\alpha_\infty, \infty) = 0, \quad h(\pm\alpha_\infty, \infty) = 0. \qquad (11.38)$$

Шукатимемо обмежений розв'язок рівняння (11.37), який задовольняє першу умову в (11.38). Його визначаємо за формулою

$$h'(\xi) = -\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\pi^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(\eta)d\eta}{\sqrt{\alpha^2-\eta^2}\left(\eta-\xi\right)}, \qquad (11.39)$$

де $F(\eta) = \frac{d}{2\left(1+\eta^2\right)} K\left(\frac{\tau_0}{f} - P^\infty\right) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{r'(\psi)}{\psi-\eta} d\psi$.

Він існує за виконання додаткової умови на праву частину СІР (11.37):

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}} = 0. \qquad (11.40)$$

Розглянемо виступи, форму яких задає функція

$$r(x) = -A\left[1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) / \, \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi b}{d}\right)\right]^{3/2}, \ |x| \le b, \qquad (11.41)$$

де $A = r(0)$ – максимальна висота виїмки ( $A \ll b$ ).

У нових змінних (11.36) ця функція має вигляд

$$r(\xi) = -A\left(1 - \xi^2/\gamma^2\right)^{3/2}. \qquad (11.42)$$

Такі виступи зумовлюють на початку взаємодії тіл контактний тиск [29, 30]

$$P(\xi) = P^\infty + 6A\pi\left(1+\xi^2\right)\left[-\xi^2 + \frac{\gamma^2}{2}\right] \Big/ (\gamma^3 K), \qquad |\xi| < \gamma; \qquad (11.43)$$

$$P(\xi) = P^\infty + \frac{6A\pi\left(1+\xi^2\right)}{\gamma^3 K}\left[|\xi|\sqrt{\xi^2-\alpha^2} - \xi^2 + \frac{\gamma^2}{2}\right], \ \gamma \le |\xi| \le 1/2. \ (11.44)$$

Інтервал ( $-\alpha(0);\alpha(0)$ ), на якому розпочинається стирання, визначаємо з умови $P\left(\alpha(0),0\right) = \frac{\tau_0}{f}$. Враховуючи в ній подання для контактного тиску (11.43), (11.44) і початкову умову (11.30), отримуємо рівняння для знаходження $\alpha_0 = \alpha(0)$:

$$\frac{6A\pi\left(1+\alpha_0^2\right)}{\gamma^3}\left[\frac{\gamma^2}{2}-\alpha_0^2\right]=K\frac{\tau_0}{f}-KP^{\infty}. \qquad (11.45)$$

Обчисливши функцію $h'(\xi,\infty)$ зі співвідношення (11.45) і проінтегрувавши її з урахуванням другої умови з (11.41), визначимо товщину спрацьованого матеріалу:

$$h(\xi)=\frac{dK\left(\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}\right)}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha^2+1}}-\operatorname{arcth}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right)\right]+$$

$$+\frac{A}{\gamma^3}\left(\alpha^2-\xi^2\right)^{3/2}, \qquad |\xi|\le\alpha_{\infty}. \qquad (11.46)$$

Із додаткової умови (11.40) отримаємо рівняння для ділянки, де відбулося припрацювання

$$\frac{3A\pi}{\gamma d}\left[\frac{\alpha_{\infty}^2}{\gamma^2}-1\right]+\frac{K\frac{\tau_0}{f}-KP^{\infty}}{\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}}=0. \qquad (11.47)$$

Контактний тиск поверхонь після припрацювання матиме вигляд:

$$P(\xi,\infty)=P(\xi,0)-\frac{6A\pi\left(1+\xi^2\right)}{d\gamma^3K}\left[-\xi^2+\frac{\alpha_{\infty}^2}{2}\right]+$$

$$+\frac{K\left(\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}\right)}{\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}}\left[\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}-1-\xi^2\right], \qquad \alpha\le\xi<\gamma; \qquad (11.48)$$

$$P(\xi,\infty)=P(\xi,0)-\frac{6A\pi\left(1+\xi^2\right)}{d\gamma^3K}\left[|\xi|\sqrt{\xi^2-\alpha_{\infty}^2}-\xi^2+\frac{\alpha_{\infty}^2}{2}\right]+$$

$$+\frac{K\left(\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}\right)}{\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}}\left[|\xi|\sqrt{\xi^2-\alpha_{\infty}^2}+\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}-1-\xi^2\right], \quad \gamma\le\xi\le 1/2. \quad (11.49)$$

Розраховували при таких вхідних даних: $d=1$; $\tilde{A}=0{,}001$.

На рис. 11.11 побудовано залежності початкової $\tilde{a}_0$ (штрихові криві)та кінцевої $\tilde{a}_{\infty}$ (суцільні криві) ділянок зношування виступу від зовнішнього навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ за різного порогового значення сили тертя $\tilde{\tau}_0$ (крива 1 –

$\tilde{\tau}_0 = 0,038$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,05$, крива 3 – $\tilde{\tau}_0 = 0,063$). Зі збільшенням зовнішнього навантаження ділянки зношування зростають.

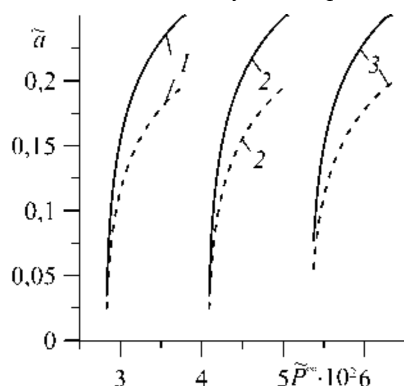



**Рис. 11.11**

Форму виступів в початковий момент (штрихова крива) та після зношування (суцільні криві) за $\tilde{\tau}_0 = 0,038$ при різних зовнішніх навантаженнях (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0325$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,035$, крива 3 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0374$) та при $\tilde{P}^{\infty} = 0,035$ для різного порогового значення сили тертя (крива 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0,063$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,05$) уздовж періоду $x \in [-0,5; 0,5]$ показано на рис. 11.12 та рис. 11.13 відповідно. Зі збільшенням навантаження товщина зношеного матеріалу збільшується; що більше порогове значення сили тертя, то менша товщина зношеного матеріалу.

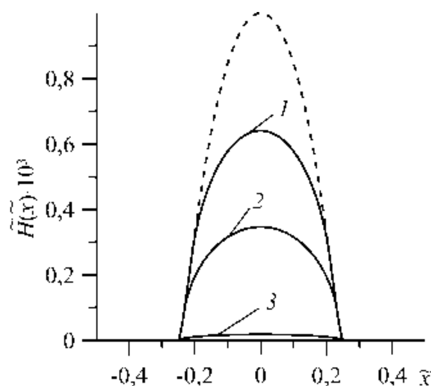



**Рис. 11.12**

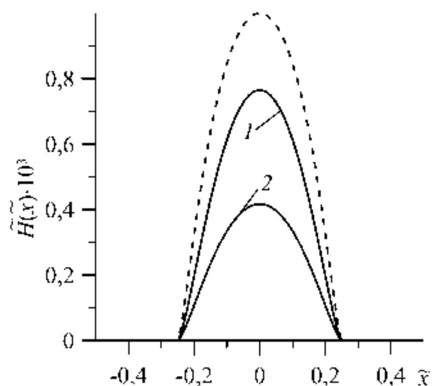



**Рис. 11.13**

На рис. 11.14 зображено розподіл контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ на початку контакту (при $t = 0$, штрихова крива) та після припрацювання (при $t \to \infty$,

суцільна крива) за $\tilde{P}^{\infty} = 0,035$ та $\tilde{\tau}_0 = 0,038$ уздовж періоду $x \in [-0,5; 0,5]$. Горизонтальна ділянка суцільних кривих відповідає рівномірному тиску на ділянці припрацювання після зношування. Точки перетину штрихової кривої з горизонтальною ділянкою визначають контактну зону, звідки розпочнеться зношування.

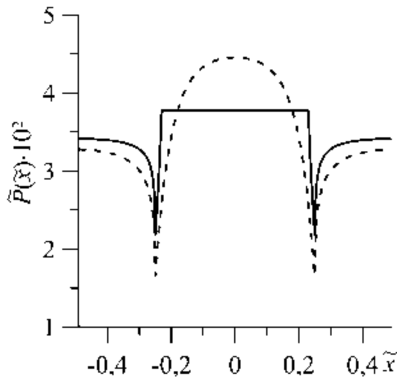


**Рис. 11.14**

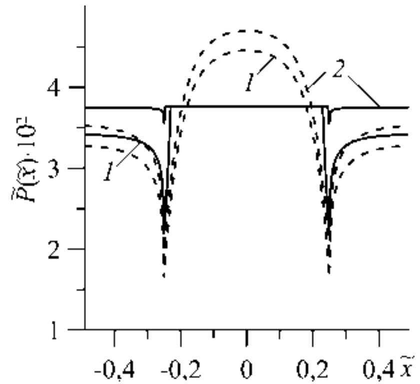



**Рис. 11.15**

Рис. 11.15 ілюструє контактний тиск на початку і після припрацювання при $\tilde{\tau}_0 = 0,038$ для різних значень навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,035$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0374$). Штрихові лінії зображають початковий тиск, а суцільні – кінцевий. Після припрацювання максимальний контактний тиск зменшується, а мінімальний зростає. Що більше зовнішнє навантаження, то більші ділянки початкового і кінцевого зношування та кількість зношеного матеріалу. Контактний тиск після припрацювання зі збільшенням зовнішнього навантаження стає рівномірнішим, тобто зменшується перепад між максимальним і мінімальним тиском.

## 11.4. Зносоконтактна задача для тіла з хвилястою поверхнею

Розглянемо взаємодію двох ізотропних пружних півнескінченних тіл $D_1$ і $D_2$ з ідентичних матеріалів. Поверхня одного з них ($D_1$) плоска, а іншого ($D_2$) – хвиляста, що описує функція $r(x) = -A\cos^2(\pi x/d)$, $x \in [-\infty; \infty]$ (рис. 11.16). Амплітуда хвилястої поверхні $A$ значно менша від періоду $d$ ($A \ll d$). Будемо досліджувати локальне зношування тіл на основі моделі фрикційного втомного руйнування.

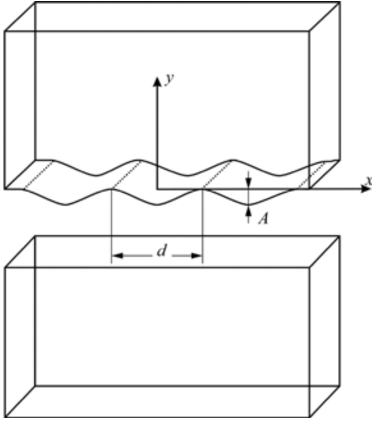



**Рис. 11.16**

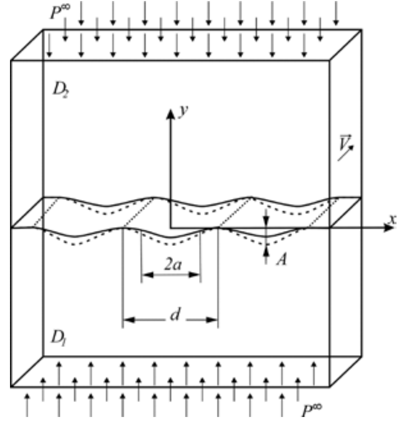



**Рис. 11.17**

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд (11.2)-(11.5). Поверхнева нерівність $r(x)$, яка після заміни змінних (11.36) має наступний вигляд

$$r(\xi) = -\frac{A}{1+\xi^2} \tag{11.50}$$

на початку взаємодії тіл зумовлює контактний тиск [7, 27, 28, 31]

$$P(\xi,0) = P^{\infty} - \frac{2A\pi\left(\xi^2-1\right)}{Kd\left(\xi^2+1\right)}. \tag{11.51}$$

Інтервал $(-\alpha_0;\alpha_0)$, на якому розпочинається стирання, визначаємо з умови $P\left(\alpha(0),0\right) = \frac{\tau_0}{f}$. Враховуючи в ній подання для контактного тиску (11.51), отримуємо рівняння для знаходження $\alpha_0$:

$$\frac{2A\pi\left(\alpha_0^2-1\right)}{d\left(\alpha_0^2+1\right)} + K\left(\frac{\tau_0}{f} - P^{\infty}\right) = 0. \tag{11.52}$$

Після припрацювання $(t\to\infty)$ контактний тиск на всій ділянці $L_0(\infty)$ стає рівним $\tau_0/f$ і зношення зупиняється, тобто $\partial h(x,t)/\partial t = 0$ при $t\to\infty$. Враховуючи цю асимптотичну поведінку з використанням методу функцій міжконтактних зазорів сформульовану контактну задачу зведено до СІДР з ядром Гільберта відносно функції зношування $h(x,\infty)$, яке після заміни змінних (11.36) трансформувалося у СІР з ядром Коші:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{h'(\eta,\infty)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{dK\left(\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}\right)}{\pi\left(1+\xi^2\right)}+\frac{2A\left(\xi^2-1\right)}{\left(1+\xi^2\right)^2},\quad x\in L_0(t)\,. \qquad (11.53)$$

Згідно з умовою $h'(\pm\alpha_{\infty},\infty)=0$ визначаємо обмежений розв'язок СІР (11.53):

$$h'(\xi,\infty)=-\frac{2A}{\sqrt{\alpha^2+1}}\frac{\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\left(1+\xi^2\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha^2+1}}\left(\frac{A\pi}{\alpha^2+1}-\frac{dK\left(\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}\right)}{2}\right)\frac{\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\left(1+\xi^2\right)}\,. \qquad (11.54)$$

Він існує за виконання додаткової умови на праву частину СІР (11.54), з якої отримуємо рівняння для ділянки, де відбулося припрацювання:

$$\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}-\frac{2A\pi}{Kd\left(\alpha_{\infty}^2+1\right)}=0 \qquad (11.55)$$

Проінтегрувавши вираз (11.54) за умови $h(\pm\alpha_{\infty},\infty)=0$ та із використанням співвідношення (11.55), визначимо товщину спрацьованого матеріалу:

$$h\left(\xi\right)=\frac{A}{\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}}\left(\frac{\sqrt{\alpha_{\infty}^2-\xi^2}}{1+\xi^2}+\frac{\operatorname{arcth}\left(\frac{\sqrt{\alpha_{\infty}^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}}\right)}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right),\quad \left|\xi\right|\le\alpha_{\infty}\,. \qquad (11.56)$$

Контактний тиск поверхонь після припрацювання матиме вигляд:

$$P\left(\xi,\infty\right)=P\left(\xi,0\right)+\frac{4A\pi}{dK\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}}\frac{\left|\xi\right|\sqrt{\xi^2-\alpha_{\infty}^2}}{1+\xi^2}\,. \qquad (11.57)$$

Розраховували при таких вхідних даних: $d=1$; $\tilde{A}=0,001$.

На рис. 11.18 зображено залежності початкової $\tilde{a}_0$ (штрихові криві)та кінцевої $\tilde{a}_{\infty}$ (суцільні криві) ділянок зношування виступу від зовнішнього навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ за різного порогового значення сили тертя $\tilde{\tau}_0$ (крива 1 –

$\tilde{\tau}_0 = 0,00785$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,0094$, крива 3 – $\tilde{\tau}_0 = 0,011$). Зі збільшенням зовнішнього навантаження ділянки зношування зростають.

Форму виступів в початковий момент (штрихова крива) та після зношування (суцільні криві) за $\tilde{\tau}_0 = 0,00785$ при різних зовнішніх навантаженнях (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,005$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,006$, крива 3 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0075$) та при $\tilde{P}^{\infty} = 0,0075$ для різного порогового значення сили тертя (крива 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0,00785$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,0094$, крива 3 – $\tilde{\tau}_0 = 0,011$) уздовж періоду $x \in [-0,5; 0,5]$ показано на рис. 11.19 та рис. 11.20 відповідно. Зі збільшенням навантаження товщина зношеного матеріалу збільшується. Що більше порогове значення сили тертя, то менша товщина зношеного матеріалу.

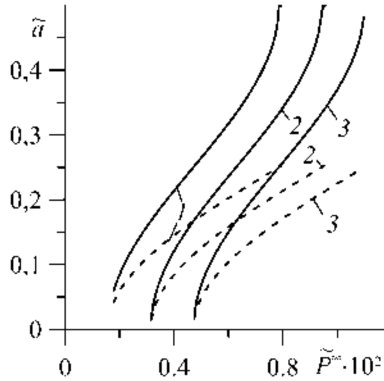



**Рис. 11.18**

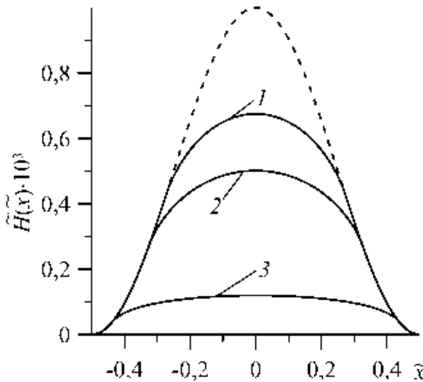



**Рис. 11.19**

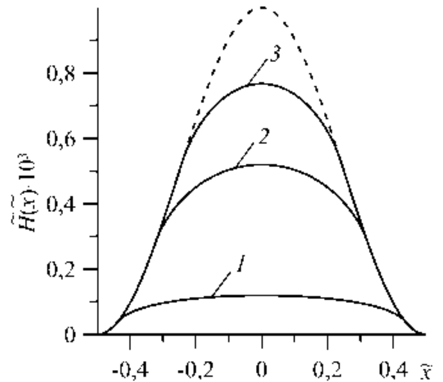



**Рис. 11.20**

На рис. 11.21 зображено розподіл контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ на початку контакту (при $t = 0$, штрихова крива) та після припрацювання (при $t \to \infty$,

суцільна крива) за $\tilde{P}^{\infty} = 0,006$ та $\tilde{\tau}_0 = 0,00785$ уздовж періоду $x \in [-0,5;0,5]$. Горизонтальна ділянка суцільних кривих відповідає рівномірному тиску на ділянці припрацювання після зношування. Точки перетину штрихової кривої з горизонтальною ділянкою визначають контактну зону, звідки розпочнеться зношування.

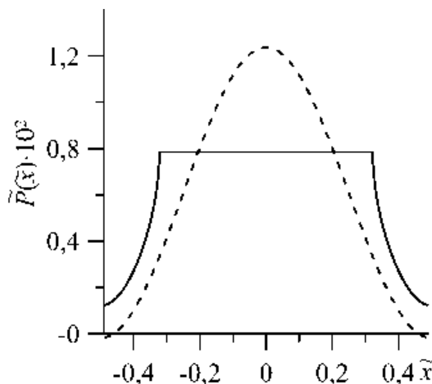



**Рис. 11.21**

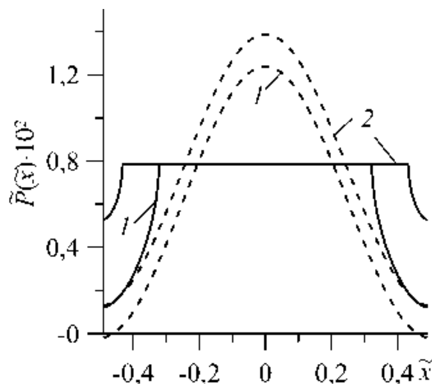



**Рис. 11.22**

Рис. 11.22 відтворює контактний тиск на початку і після припрацювання при $\tilde{\tau}_0 = 0,00785$ для різних значень навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,006$, 2 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0075$). Штрихові лінії зображають початковий тиск, а суцільні – кінцевий. Після припрацювання максимальний контактний тиск зменшується, а мінімальний зростає. Що більше зовнішнє навантаження, то більші ділянки початкового і кінцевого зношування та кількість зношеного матеріалу.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров В.М.* О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел // Докл. АН СССР. – 1983. – № 12. – С. 827-831.
2. *Андрейкив А.Е., Панасюк В.В., Чернец М.В.* К теории износа материалов при сухом трении // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1981. – **17**, № 2. – С. 99-104.
3. *Андрейкив А.Е., Чернец М.В.* Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин. – К.: Наукова думка , 1991 – 160 с.
4. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
5. *Гриліцький Д.В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: ІЗМН, 1996. – 204 с.

6. *Евтушенко А.А., Уханская О.М.* Термомеханический критерий изнашивания // Трение и износ. – 1994. – **15**, № 3. – С. 379–388.
7. *Козачок О.П.* Вплив часткового заповнення просвітів стисливою рідиною на контакт пружних тіл із хвилястим рельєфом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2020. – **56**, № 3. – С. 24-30.
8. *Козачок О.П.* Локальне фрикційне зношування пружного півпростору з виступом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2021. – **57**, № 6. – С. 42-48.
9. *Козачок О.П., Мартиняк Р.М., Слободян Б.С.* Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. – Львів: Растр-7, 2018. – 200 с.
10. *Кузьменко А.Г.* Методи розрахунків на зношування та надійність. – Хмельницький: ТУП, 2002. – 151 с.
11. *Ляшенко Б.А., Новиков Н.В., Клименко С.А.* Дискретное модифицирование поверхностного слоя деталей машин и инструментов. – К.: ИСМ им. В.Н. Бакуля, 2017. – 264 с.
12. *Максимук О.В.* Зношування покрить твердих тіл з урахуванням проміжкового шару // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 1. – С. 121–123.
13. *Мартиняк Р.М.* Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 102–108.
14. *Мартиняк Р.М., Швець Р.М., Глод А.В.* Припрацювання рухомих півпросторів за часткового зношування виступу на поверхні контакту // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 1. – С. 51-58.
15. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 600 с.
16. *Пелех Б.Л., Максимук А.В.* Математическое моделирование процессов износостойкости тел с покрытиями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 19811. – Вып. 37. – С. 51–56.
17. *Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – К.: Наук. думка, 1988. – 280 с.
18. *Сачук Ю.В., Максимук О.В.* Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми // Вісник Тернопільськ. нац. ун-ту. – 2015. – № 2. – С. 70-80.
19. *Сачук Ю.В., Максимук О.В.* Контактна задача про зношування пружної півплощини з покриттям Вінклера штампами канонічної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 136-140.
20. *Ткачук Н.А., Дьяченко С.С., Посвятенко Э.К., Кравченко С.А., Гончаров В.Г., Шпаковский В.В., Белов Н.Л., Шейко А.И., Олейник А.К., Пономаренко И.В.* Континуальная и дискретно–континуальная

модификация поверхностей деталей. – Х.: Щедра садиба плюс, 2015. – 259 с.

21. *Чернець М.В.* Трибоконтактні задачі для циліндричних з’єднань з технологічною некруглістю. – Люблін: Люблінська політехніка, 2013. – 273 с.
22. *Шнейдер Ю.Г.* Эксплуатационные свойства деталей с регулярным микрорельефом. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2001. – 264 с.
23. *Brauer J., Andersson S.* Simulation of wear in gears with flank interference – A mixed FE and analytical approach // Wear. – 2003. – **254**, No. 11. – P. 1216–1232.
24. *Etsion I.* State of the art in laser surface texturing // Trans. ASME. J. Tribol. – 2005. – **127**, No. 1. – P. 248–253.
25. *Goryacheva I.G.* Contact mechanics in tribology. – Kluwer, Dordrecht, 1998. – 346 p.
26. *Goryacheva I.G.* Wear process for coated bodies with periodic microgeometry at the interface // Int. J. Eng. Sci. – 2012. – No. 61. – P. 48–52.
27. *Kozachok O.P.* Influence of partial filling of the gaps with compressible liquid on the contact of elastic bodies with wavy surfaces // Mater. Sci. – 2020. – **56**, No. 3. – P. 310-318.
28. *Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.* Contact of two elastic bodies with wavy topography in the presence of gases in gaps // Mater. Sci. – 2018. – **54**, No. 2. – P. 194-201.
29. *Kozachok O.P., Slobodyan B.S., Martynyak R.M.* Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // Mater. Sci. – 2016. – **51**, No. 6. – P. 804–813.
30. *Kozachok O.P., Slobodian B.S., Martynyak R.M.* Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 2. – P. 131–142.
31. *Kozachok O.P., Martynyak R.M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // Mathematics and Mechanics of Solids. – 20111. – **24**, No. 11. – P. 3381–3393.
32. *Shvets R.M., Martynyak R.M., Kryshtafovych A.A.* Discontinuous contact of an anisotropic half–plane and a rigid base with disturbed surface // Int. J. Eng. Sci. – 1996. – **34**, No. 2. – P. 183–200.
33. *Stepien P.* Deterministic and stochastic components of regular surface texture generated by a special grinding process // Wear. – 2011. – **271**, No. 3–4. – P. 514–518.
34. *Zhan W., Huang P.* Numerical analysis of time-varying wear with elastic deformation in line contact // Friction. – 2019 – **7**. – P. 143–152.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**Кундрат Микола Михайлович, Гук Наталія Анатоліївна, Козакова Наталія Леонідівна, Острик Володимир Іванович, Слободян Микола Степанович, Кузьменко Василь Іванович, Приходько Олена Валеріївна, Д'яченко Наталія Миколаївна, Шашкова Євгенія Віталіївна, Силованюк Віктор Петрович, Вайсфельд Наталія Данилівна, Фесенко Ганна Олександрівна, Козачок Олег Петрович, Мартиняк Ростислав Михайлович, Максимук Олександр Васильович, Сачук Юрій Володимирович, Сяський Андрій Олексійович, Шевцова Наталія Вікторівна, Сяський Володимир Андрійович, Дейнека Олег Юрійович, Нагірний Тарас Семенович, Червінка Костянин Андрійович, Камінський Анатолій Олексійович, Дудик Михайло Володимирович, Феньків Володимир Михайлович**

# КОНТАКТНА МЕХАНІКА

## ШОРСТКІСТЬ, РОЗШАРУВАННЯ І ЗНОШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

**Колективна монографія**

***За загальною редакцією Р. М. Мартиняка***

Літературне редагування *Д. С. Бриняк*
Комп'ютерне макетування *О. П. Козачок*

Підписано до друку 12.12.2022
Формат 60х84/16. Умовн. друк. арк. 22,79

Видавець Вікторія Кундельська
*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців ДК № 7454 від 21.09.2021 р.*

*79037, Львів, вул. Студинського, 4*
тел. +380 98 44 92 543, +380 50 73 42 330
e-mail: kundelskaviktoria6859@gmail.com